УДК 519.718

М. А. Алехина, О. Ю. Барсукова

ОЦЕНКИ НЕНАДЕЖНОСТИ СХЕМ В БАЗИСЕ РОССЕРА – ТУРКЕТТА[1]

Аннотация.

Актуальность и цель. В современной математике и технике теория синтеза схем из ненадежных функциональных элементов занимает важное место. Стоит отметить, что до сих пор рассматривались задачи построения надежных схем, реализующих только булевые функции. В данной работе предложена математическая модель построения асимптотически оптимальных по надежности схем, реализующих функции трехзначной логики. Исследуется задача реализации функций трехзначной логики схемами из ненадежных функциональных элементов в базисе Россера – Туркетта. Предполагается, что все базисные элементы независимо друг от друга переходят в неисправные состояния и любой базисный элемент на любом входном наборе (с вероятностью $1 - 2\varepsilon$) выдает правильное значение и с вероятностью, равной ε, может выдать любое из двух неправильных. Целью данной работы является получение нижних и верхних оценок ненадежности схем и построение асимптотически оптимальных по надежности схем.

Результаты. В результате исследования полученные ранее верхние оценки ненадежности удалось доказать, существенно ослабив ограничения на ε (ранее эта вероятность зависела от n – числа переменных функции, а в этой работе ее удалось заменить константой). Доказана асимптотическая точность верхних оценок, т.е. в базисе Россера – Туркетта найден класс K функций трехзначной логики такой, что при реализации любой функции из этого класса любой схемой нижняя оценка ненадежности этой схемы будет асимптотически равна верхней оценке ненадежности. Класс K описан в явном виде, а также найдена оценка для количества функций, входящих в данный класс.

Выводы. Установлено, что любую функцию трехзначной логики можно реализовать схемой, функционирующей с ненадежностью, асимптотически (при $\varepsilon \to 0$) не больше 6ε. Доказано, что функции класса K (содержащего почти все функции трехзначной логики) нельзя реализовать схемами с ненадежностью, асимптотически (при $\varepsilon \to 0$) меньше 6ε. Таким образом, почти все функции трехзначной логики можно реализовать асимптотически оптимальными по надежности схемами, функционирующими с ненадежностью, асимптотически равной 6ε при $\varepsilon \to 0$.

Ключевые слова: функции трехзначной логики, схема из функциональных элементов, ненадежность схемы.

M. A. Alekhina, O. Yu. Barsukova

CIRCUIT FAILURE ESTIMATE IN THE ROSSER – TURKETT BASIS

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты 14-0131360 и 14-01-00273.

Abstract.

Background. In modern mathematics and engineering the theory of synthesis of circuits consisting of unreliable functional elements takes an important place. It should be noted that until now one have used to consider the problems of building reliable circuits, realizing the Boolean functions only. The authors suggest a mathematical model for constructing asymptotically optimal reliable circuit, realizing ternary logics functions. The researchers studied the problem of realization of ternary logic function circuits of unreliable functional elements in the Rosser – Turkett basis. It is assumed that all the basic elements get faulty independently of each other, and any basic element at any input set (with probability 1–2ε) gives the correct value, and, with ε probability, can give any of the two incorrect values. The aim of this work is to obtain lower and upper bounds for reliability of circuits and to construct asymptotically optimal reliable circuits.

Results. As a result of the study the authors managed to prove the previously obtained upper failure estimates, significantly weakening ε restrictions (previously the probability depended on n – number of variables, functions, and in this work it was replaced by a constant). The authors proved asymptotic accuracy of the upper bounds, i. e. in the Rosser – Turkett basis they found the K class of ternary logic functions, which means that the lower bound for the unreliability of a circuit is asymptotically equal to the upper bound of unreliability for the implementation of any function of this class by any circuit. The K class was explicitly described, as well there was found an estimate for the number of functions, which are included in this class.

Conclusion. It is established that any ternary logic functions can be realized by a circuit that operates with unreliability, asymptotically (at $\varepsilon \to 0$), not greater than 6ε. It is proved that the function of K class (containing almost all ternary logic functions) can not be realized by circuits with unreliability, asymptotically (at $\varepsilon \to 0$) less than 6ε. Thus almost all ternary logic functions can be realized by asymptotically optimal reliable circuits that operate with unreliability, that is asymptotically equal to 6ε at $\varepsilon \to 0$.

Key words: ternary logics functions, functional elements circuit, unreliability of circuit.

Введение

В современной технике и математике в подавляющем большинстве случаев используется двузначная логика. Это исторически сложившееся положение предопределено ее сравнительной простотой и сделало ее применение предпочтительным (в сравнении с другими логическими системами) с технической и экономической точек зрения. Основные модельные объекты, работающие на основе двузначной логики (например, схемы из ненадежных элементов [1], неветвящиеся программы [2]), на данный момент являются хорошо изученными. Однако сложность решаемых задач, а следовательно, и технических устройств постоянно возрастает.

Многозначная логика предоставляет более широкие возможности для разработки различных алгоритмов во многих областях. Она позволяет уменьшить как вычислительную сложность, так и размеры, число соединений в различных арифметико-логических устройствах, повысить плотность размещения элементов на схемах, найти альтернативные методы решения задач.

Уже сейчас многозначная логика с успехом применяется при решении многих задач и во множестве технических разработок. Среди них различные арифметические устройства, системы искусственного интеллекта и обработки данных, обработка сложных цифровых сигналов и т.д.

Определенный интерес представляет задача исследования надежности функционирования схем в полном базисе из трехзначных функций. Данная статья посвящена нахождению нижних оценок ненадежности схем в базисе Россера – Туркетта.

1. Постановка задачи

Пусть $n \in N$, а P_3 – множество всех функций трехзначной логики, т.е. функций $f(x_1,...,x_n):\{0,1,2\}^n \to \{0,1,2\}$. Рассмотрим реализацию функций из множества P_3 схемами из ненадежных функциональных элементов в базисе Россера – Туркетта

$$\{0,1,2, J_0(x_1), J_1(x_1),\ J_2(x_1), \max(x_1,x_2), \min(x_1,x_2)\}.$$

Для краткости обозначим $\max(x_1,x_2)$ через $\vee$, а $\min(x_1,x_2)$ через $\&$.

Будем считать, что схема из ненадежных элементов реализует функцию $f(\tilde{x})$ $(\tilde{x}=(x_1,...,x_n))$, если при поступлении на входы схемы набора $\tilde{a}$ при отсутствии неисправностей в схеме на ее выходе появляется значение $f(\tilde{a})$.

Предполагается, что все базисные элементы ненадежны, переходят в неисправные состояния независимо друг от друга. Базисный элемент с приписанной ему функцией $\varphi(x_1,x_2)$ на любом входном наборе (a_1,a_2), $\varphi(a_1,a_2)=\tau$ с вероятностью $1-2\varepsilon$ $(\varepsilon \in (0,1/4))$ выдает значение $\tau\,(mod\,3)$, с вероятностью ε выдает значение $\tau+1\,(mod\,3)$ и с вероятностью ε выдает значение $\tau+2\,(mod\,3)$.

Пусть схема S реализует функцию $f(\tilde{x})$, $\tilde{a}$ – произвольный входной набор схемы S, $f(\tilde{a})=\tau$. Обозначим через $P_{f(\tilde{a})\neq\tau}(S,\tilde{a})$ вероятность появления ошибки на выходе схемы S при входном наборе $\tilde{a}$. Ясно, что

$$P_{f(\tilde{a})\neq\tau}(S,\tilde{a}) = P_{\tau+1}(S,\tilde{a}) + P_{\tau+2}(S,\tilde{a}).$$

Например, если входной набор $\tilde{a}$ схемы S такой, что $f(\tilde{a})=0$, то вероятность ошибки на этом наборе равна $P_{f(\tilde{a})\neq 0}(S,\tilde{a}) = P_1(S,\tilde{a}) + P_2(S,\tilde{a})$.

Ненадежностью схемы S будем называть число $P(S)=\max\{P_{f(\tilde{a})\neq\tau}(S,\tilde{a})\}$, где максимум берется по всем входным наборам $\tilde{a}$ схемы S. Надежность схемы S равна $(1-P(S))$.

Пусть $P_\varepsilon(f)=\inf P(S)$, где инфимум берется по всем схемам S из ненадежных элементов, реализующим функцию f.

Схема A из ненадежных элементов, реализующая функцию f, называется *асимптотически оптимальной по надежности*, если $P(A) \sim P_\varepsilon(f)$ при $\varepsilon \to 0$.

Замечание 1. Учитывая рассматриваемые неисправности, отметим, что каждый базисный элемент на любом входном наборе выдает правильное значение с вероятностью $(1-2\varepsilon)$, а любое из двух неверных значений – с вероятностью ε. Таким образом, ненадежность $P(E)$ любого базисного элемента E равна 2ε (т.е. $P(E)=2\varepsilon$), а надежность элемента E равна $(1-2\varepsilon)$.

2. Верхние оценки ненадежности схем

Пусть f – произвольная функция из P_3, а S – любая схема, реализующая функцию f. По схеме S построим новую схему, которую будем использовать для повышения надежности исходной схемы S. Для этого возьмем два экземпляра схемы S и соединим их выходы со входами базисного элемента E, реализующего функцию $\&$. Полученную схему назовем схемой B'. Далее возьмем два экземпляра схемы B' и соединим их выходы со входами базисного элемента E, реализующего функцию $\vee$. Новую схему обозначим $\psi(S)$. Нетрудно проверить, что $\psi(S)$ реализует ту же функцию f.

Ранее доказана теорема 1 [3], в которой получено рекуррентное соотношение для ненадежностей схем S и $\psi(S)$.

Теорема 1 [3]. Пусть f – произвольная функция из P_3, S – любая схема, реализующая f, а $P(S)$ – ненадежность схемы S. Тогда схема $\psi(S)$ реализует функцию f с ненадежностью

$$P(\psi(S)) \le \max\left\{6\varepsilon + 4\varepsilon P(S) + 2P^2(S), 4\varepsilon + \varepsilon^2 + 4[\varepsilon + P(S)]^2\right\}. \quad (1)$$

Докажем теоремы 2 и 3, в которых полученные ранее верхние оценки ненадежности [3] удалось доказать, существенно ослабив ограничения на ε (ранее эта вероятность зависела от n – числа переменных функции, а в этой работе ее удалось заменить константой).

Теорема 2. При любом $n \in \mathrm{N}$ произвольную функцию $f(x_1,...,x_n) \in P_3$ можно реализовать схемой D с ненадежностью $P(D) \le 8\varepsilon$ при $\varepsilon \in (0{,}1/1000]$.

Доказательство проведем индукцией по n.

1. Докажем утверждение для $n=1$, т.е. для всех возможных функций $f(x)$, зависящих от одной переменной. Представим функцию $f(x)$ в первой форме [4]:

$$f(x) = J_0(x)\,\&\, f(0) \vee J_1(x)\,\&\, f(1) \vee J_2(x)\,\&\, f(2).$$

Чтобы промоделировать представленную формулу схемой, назовем ее S', потребуется не более 11 элементов. Следовательно, ненадежность данной схемы $P(S') \le 22\varepsilon$.

По схеме S' построим схему $\psi(S')$, заменив S схемой S'. Используя теорему 1 и условие $\varepsilon \le \dfrac{1}{1000}$, оценим ненадежность схемы $\psi(S')$:

$$P(\psi(C)) \le \max\left\{6\varepsilon + 4\cdot 22\varepsilon^2 + 2\cdot 22^2\varepsilon^2, 4\varepsilon + \varepsilon^2 + 4\cdot 23^2\varepsilon^2\right\} =$$

$$= \max\left\{6\varepsilon + 1056\varepsilon^2, 4\varepsilon + 2117\varepsilon^2\right\} \le \max\left\{6\varepsilon + \frac{1056}{1000}\varepsilon, 4\varepsilon + \frac{2117}{1000}\varepsilon\right\} \le 8\varepsilon.$$

Таким образом, для $n=1$ теорема верна.

2. Пусть индукционное предположение верно для функций с числом переменных $(n-1)$. Докажем, что оно верно для функций $f(x_1,...,x_n)$. Разложим функцию $f(x_1,...,x_n)$ по последней переменной

$$f(x_1,...,x_{n-1},x_n) = J_0(x_n) \,\&\, f(x_1,...,x_{n-1},0) \vee J_1(x_n) \,\&$$

$$\& f(x_1,...,x_{n-1},1) \vee J_2(x_n) \,\&\, f(x_1,...,x_{n-1},2)$$

и реализуем следующей схемой C (рис. 1), где схема S_0 реализует $f_0 = f(x_1,...,x_{n-1},0)$, схема S_1 реализует $f_1 = f(x_1,...,x_{n-1},1)$, а схема S_2 реализует $f_2 = f(x_1,...,x_{n-1},2)$.

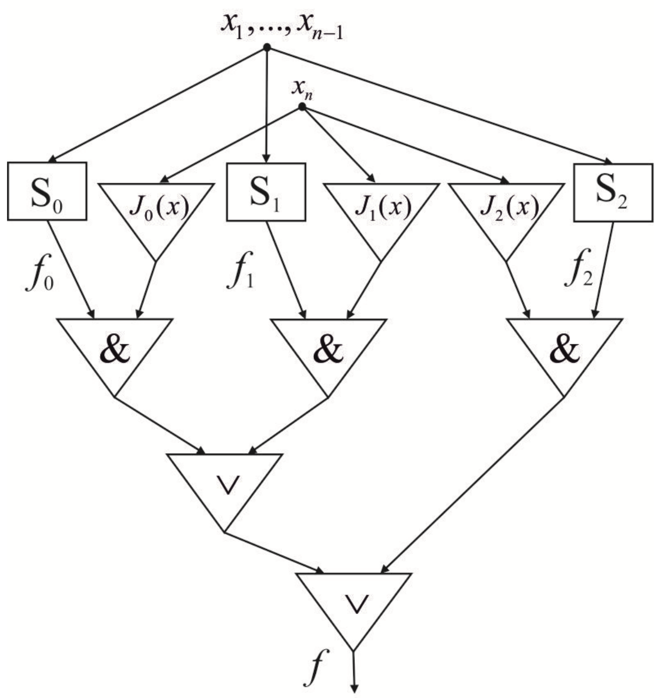

Рис. 1

В схеме C выделим подсхему A, состоящую из восьми элементов (рис. 1), выход которой является выходом схемы C, а на входы подаются значения x_n, $f_0 = f(x_1,...,x_{n-1},0)$, $f_1 = f(x_1,...,x_{n-1},1)$ и $f_2 = f(x_1,...,x_{n-1},2)$.

Выделенная подсхема A состоит из восьми элементов, поэтому ее ненадежность $P(S) \le 16\varepsilon$. Функции $f_0 = f(x_1,...,x_{n-1},0)$, $f_1 = f(x_1,...,x_{n-1},1)$ и $f_2 = f(x_1,...,x_{n-1},2)$ согласно индуктивному предположению можно реализовать схемами с ненадежностью не более 8ε. Если схема A исправна, то для реализации f она использует значение одной из схем, реализующих f_0, f_1 и f_2. Поэтому

$$P(C) \le P(A) + 8\varepsilon \le 16\varepsilon + 8\varepsilon = 24\varepsilon.$$

По схеме C построим схему $\psi(C)$ (см. теорему 1). Воспользуемся соотношением (1) при условии, что $\varepsilon \le \frac{1}{1000}$, и оценим ненадежность схемы $\psi(C)$:

$$P(\psi(C)) \le \max\left\{6\varepsilon + 4\cdot 24\varepsilon^2 + 2\cdot 24^2\varepsilon^2,\ 4\varepsilon + \varepsilon^2 + 4\cdot 25^2\varepsilon^2\right\} =$$

$$\max\left\{6\varepsilon + 1248\varepsilon^2,\ 4\varepsilon + 2501\varepsilon^2\right\} \le \max\left\{6\varepsilon + \frac{1248}{1000}\varepsilon,\ 4\varepsilon + \frac{2501}{1000}\varepsilon\right\} \le 8\varepsilon.$$

Следовательно, схема $\psi(C)$ – искомая схема D. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. Любую функцию $f \in P_3$ можно реализовать схемой D с ненадежностью $P(S) \le 6\varepsilon + 126\varepsilon^2$, при $\varepsilon \in (0, 1/1000]$.

Доказательство. По теореме 2 любую функцию $f \in P_3$ можно реализовать схемой D с ненадежностью $P(D) \le 8\varepsilon$. По схеме D построим схему $\psi(D)$ и оценим ее ненадежность по формуле (1) из теоремы 1 при условии, что $\varepsilon \le \frac{1}{1000}$:

$$P(\psi(D)) \le \max\left\{6\varepsilon + 4\cdot 8\varepsilon^2 + 2\cdot 8^2\varepsilon^2, 4\varepsilon + \varepsilon^2 + 4\cdot 9^2\varepsilon^2\right\} =$$

$$\max\left\{6\varepsilon + 160\varepsilon^2,\ 4\varepsilon + 325\varepsilon^2\right\} \le \max\left\{6\varepsilon + \frac{160}{1000}\varepsilon,\ 4\varepsilon + \frac{325}{1000}\varepsilon\right\} \le 7\varepsilon.$$

И наконец, построим схему $\psi(\psi(D))$, заменив схему D схемой $\psi(D)$, используя формулу (1). Тогда

$$P(\psi(\psi(D))) \le \max\left\{6\varepsilon + 4\cdot 7\varepsilon^2 + 2\cdot 7^2\varepsilon^2, 4\varepsilon + \varepsilon^2 + 4\cdot 8^2\varepsilon^2\right\} \le 6\varepsilon + 126\varepsilon^2.$$

Теорема 3 доказана.

Из теоремы 3 следует, что все функции из P_3 можно реализовать схемами, функционирующими с ненадежностью, асимптотически (при $\varepsilon \to 0$) не больше 6ε.

3. Нижние оценки ненадежности схем

Теорема 4. Пусть f – произвольная функция, отличная от константы; S – любая схема, ее реализующая. Пусть подсхема A схемы S содержит выход схемы S и реализует функцию $\varphi(y_1,...,y_m)$ $((y_1,...,y_m) = \hat{y})$ с ненадежностью $P(A) \le 1/2$. Пусть $p_0 = \min_{\hat{b}_0} P_{\varphi(\hat{b}_0)\ne 0}(A, \hat{b}_0)$, где $\hat{b}_0$ такой входной набор схемы A, что $\varphi(\hat{b}_0) = 0$; $p_1 = \min_{\hat{b}_1} P_{\varphi(\hat{b}_1)\ne 1}(A, \hat{b}_1)$, где $\hat{b}_1$ такой входной набор схемы A, что $\varphi(\hat{b}_1) = 1$; $p_2 = \min_{\hat{b}_2} P_{\varphi(\hat{b}_2)\ne 2}(A, \hat{b}_2)$, где $\hat{b}_2$ такой входной набор схемы A, что $\varphi(\hat{b}_2) = 2$.

Тогда вероятности ошибок на выходе схемы S *удовлетворяют неравенствам:*

$$P_{f(\tilde{a})\neq 0}(S,\tilde{a}) \geq p_0 \text{, если } f(\tilde{a})=0;$$

$$P_{f(\tilde{a})\neq 1}(S,\tilde{a}) \geq p_1 \text{, если } f(\tilde{a})=1;$$

$$P_{f(\tilde{a})\neq 2}(S,\tilde{a}) \geq p_2 \text{, если } f(\tilde{a})=2.$$

Доказательство. Пусть $\tilde{a}$ – такой входной набор схемы S, что $f(\tilde{a})=0$. В зависимости от набора $\tilde{a}$ и неисправностей в схеме на входы схемы A поступает некоторый набор длины m с компонентами из множества $\{0,1,2\}$. Обозначим множество всех таких наборов через $M(\tilde{a})$. Разобьем множество $M(\tilde{a})$ на подмножества $M_i(\tilde{a})=\{(c_1,...,c_m)\,|\,\varphi(c_1,...,c_m)=i\}$ $(i\in 0,1,2)$. Обозначим через $\nu_i(\tilde{a})$ вероятность появления на входах схемы A набора из множества $M_i(\tilde{a})$. Очевидно, что $\nu_i(\tilde{a})\geq 0$ и $\nu_0(\tilde{a})+\nu_1(\tilde{a})+\nu_2(\tilde{a})=1$.

Найдем вероятность $P_0(S,\tilde{a})$ появления 0 на выходе схемы *S*:

$$P_0(S,\hat{b}_i\in M_i(\tilde{a}))\leq \nu_0(\tilde{a})(1-p_0)+\nu_1(\tilde{a})P(A)+\nu_2(\tilde{a})P(A)=(1-\nu_1(\tilde{a})-\nu_2(\tilde{a}))\times$$

$$\times(1-p_0)+(\nu_1(\tilde{a})+\nu_2(\tilde{a}))P(A)=1-p_0-(\nu_1(\tilde{a})+\nu_2(\tilde{a}))(1-p_0-P(A)),$$

где $\hat{b}_i\in M_i(\tilde{a})$.

Тогда вероятность появления ошибки на выходе схемы S удовлетворяет неравенству

$$P_{f(\tilde{a})\neq 0}(S,\tilde{a})\geq p_0+(\nu_1(\tilde{a})+\nu_2(\tilde{a}))(1-p_0-P(A))\geq$$

$$\geq p_0+(\nu_1(\tilde{a})+\nu_2(\tilde{a}))(1-2P(A))\geq p_0,$$

так как $P(A)\leq 1/2$.

Пусть $\tilde{a}$ такой входной набор схемы S, что $f(\tilde{a})=1$. Аналогично проверяется, что вероятность появления ошибки на выходе схемы S удовлетворяет неравенству

$$P_{f(\tilde{a})\neq 1}(S,\tilde{a})\geq p_1+(\nu_0(\tilde{a})+\nu_2(\tilde{a}))(1-2P(A))\geq p_1,$$

так как $P(A)\leq 1/2$.

Пусть $\tilde{a}$ такой входной набор схемы S, что $f(\tilde{a})=2$. Аналогично проверяется, что вероятность появления ошибки на выходе схемы S равна

$$P_{f(\tilde{a})\neq 2}(S,\tilde{a})\geq p_2+(\nu_0(\tilde{a})+\nu_1(\tilde{a}))(1-2P(A))\geq p_2,$$

так как $P(A)\leq 1/2$.

Теорема 4 доказана.

Следствие 1. $P(S)\geq \max\{p_0,p_1,p_2\}$.

Пусть в схеме S, реализующей функцию f, отличную от константы, выделена подсхема B, содержащая выход схемы S и реализующая тождественную функцию. Обозначим через C подсхему, получаемую из схемы S удалением подсхемы B. Очевидно, что схема C реализует функцию f.

Будем говорить, что схема C *надежнее* схемы S (и получается из схемы S удалением подсхемы B), если выполнено неравенство $P(C) < P(S)$.

Схему S, реализующую функцию f, отличную от константы, будем называть b-схемой, если из нее нельзя получить более надежную схему удалением подсхемы, реализующей тождественную функцию.

Обозначим через w_i, $i \in \{0,1,2\}$, вероятность появления ошибки на выходе схемы B при поступлении на ее вход значения i.

Теорема 5. Пусть схема S, ненадежность которой равна $P(S)$, реализует функцию $f(\tilde{x})$ и является b-схемой. Пусть в схеме S можно выделить подсхему B, содержащую выход схемы и реализующую тождественную функцию с такими вероятностями ошибок w_0, w_1, w_2, что $0 < w_0 + w_1 + w_2 < 1$. Тогда верно неравенство

$$\min\left\{\frac{w_0}{w_0+w_1+w_2}, \frac{w_1}{w_0+w_1+w_2}, \frac{w_2}{w_0+w_1+w_2}\right\} \le P(S).$$

Доказательство (от противного). Пусть при всех $u \in \{0,1,2\}$

$$\frac{w_u}{w_0+w_1+w_2} > P(S).$$

Тогда

$$\frac{w_u}{w_0+w_1+w_2} - w_u = \frac{w_u(1-w_0-w_1-w_2)}{w_0+w_1+w_2} > P(S) - w_u.$$

Следовательно,

$$\frac{w_u}{w_0+w_1+w_2} > \frac{P(S)-w_u}{1-w_0-w_1-w_2}. \quad (2)$$

Пусть $\tilde{a}$ – произвольный входной набор схемы S, пусть $f(\tilde{a}) = i$. Найдем вероятность $P_i(S,\tilde{a})$ появления i на выходе схемы S:

$$P_i(S,\tilde{a}) = P_i(C,\tilde{a})P_i(B,i) + P_{i+1}(C,\tilde{a})P_i(B,i+1) + P_{i+2}(C,\tilde{a})P_i(B,i+2) =$$

$$= P_i(C,\tilde{a})(1-w_i) + P_{i+1}(C,\tilde{a})P_i(B,i+1) + P_{i+2}(C,\tilde{a})P_i(B,i+2) = (1 - P_{i+1}(C,\tilde{a}) -$$

$$-P_{i+2}(C,\tilde{a}))(1-w_i) + P_{i+1}(C,\tilde{a})P_i(B,i+1) + P_{i+2}(C,\tilde{a})P_i(B,i+2) =$$

$$= 1 - w_i + P_{i+1}(C,\tilde{a})(w_i + P_i(B,i+1) - 1) + P_{i+2}(C,\tilde{a})(w_i + P_i(B,i+2) - 1).$$

Тогда вероятность появления ошибки на выходе схемы S равна

$$P_{f(\tilde{a})\ne i}(S,\tilde{a}) = w_i + P_{i+1}(C,\tilde{a})(1 - w_i - P_i(B,i+1)) +$$

$$+P_{i+2}(C,\tilde{a})(1 - w_i - P_i(B,i+2)) \ge w_i + (1 - w_0 - w_1 - w_2)\times$$

$$\times(P_{i+1}(C,\tilde{a}) + P_{i+2}(C,\tilde{a})) = w_i + (1 - w_0 - w_1 - w_2)P(C),$$

т.е. верно неравенство

$$P_{f(\tilde{a})\neq i}(S,\tilde{a}) \geq w_i + (1 - w_0 - w_1 - w_2)P(C). \tag{3}$$

Из соотношения (3) следует неравенство

$$\frac{P_{f(\tilde{a})\neq i}(S,\tilde{a}) - w_i}{1 - w_0 - w_1 - w_2} \geq P(C). \tag{4}$$

Учитывая (4) и (2), имеем

$$P(C) \leq \frac{P_{f(\tilde{a})\neq i}(S,\tilde{a}) - w_i}{1 - w_0 - w_1 - w_2} \leq \frac{P(S) - w_i}{1 - w_0 - w_1 - w_2} < \frac{w_i}{w_0 + w_1 + w_2}.$$

Тогда

$$-P(C)(w_0 + w_1 + w_2) > -w_i. \tag{5}$$

Из неравенства (3), учитывая (5), следует

$$P_{f(\tilde{a})\neq i}(S,\tilde{a}) \geq w_i + P(C)(1 - w_0 - w_1 - w_2) =$$

$$= w_i + P(C) - P(C)(w_0 + w_1 + w_2) > w_i + P(C) - w_i = P(C),$$

т.е. $P_{f(\tilde{a})\neq i}(S,\tilde{a}) > P(C)$. Следовательно, $P(S) > P(C)$, что противоречит условию.

Теорема 5 доказана.

Обозначим через $K(n)$ множество функций $f(x_1, x_2, ..., x_n)\ (n \geq 3)$ из P_3, каждая из которых принимает все три значения 0, 1, 2 и не представима ни в виде $x_k \vee g(\tilde{x})$, ни в виде $x_k \& g(\tilde{x})$ ($k \in \{1, 2, ..., n\}$, $g(\tilde{x})$ – произвольная функция из P_3). Обозначим через K множество $K = \bigcup\limits_{n=3}^{\infty} K(n)$.

Справедлива теорема 6, доказательство которой аналогично доказательству теорем о нижних оценках [5, 6].

Теорема 6. Пусть функция $f \in K$. Тогда для любой схемы S, реализующей f, при $\varepsilon \in (0, 1/1000]$ верно неравенство

$$P(S) \geq 6\varepsilon - 16\varepsilon^2 + 12\varepsilon^3.$$

Доказательство. Пусть функция $f \in K$, пусть S – любая схема, реализующая f. Для ненадежности $P(S)$ схемы S верно одно из двух неравенств: либо $P(S) > 6\varepsilon + 126\varepsilon^2$ (тогда утверждение теоремы верно), либо $P(S) \leq 6\varepsilon + 126\varepsilon^2$.

Пусть $P(S) \leq 6\varepsilon + 126\varepsilon^2$. Без ограничения общности схему S можно считать b-схемой (иначе будем удалять из схемы S подсхемы, реализующие тождественную функцию, и получать более надежные схемы, реализующие функцию f, до тех пор, пока не получим b-схему S'', для которой и проведем дальнейшие рассуждения, заменив S на S''.

Обозначим его через E_1 функциональный элемент, содержащий выход схемы S, и в зависимости от приписанных ему базисных функций рассмотрим следующие варианты.

1. Пусть элементу E_1 приписана функция $\&$. Поскольку $f \in K$, входы элемента E_1 соединены не с полюсами, а с выходами некоторых элементов E_2 и E_3.

1.1. Пусть элементы E_2 и E_3 различны. Обозначим через B подсхему, состоящую из элементов E_1, E_2 и E_3. Пусть входной набор схемы B таков, что при отсутствии неисправностей в схеме B на ее выходе появляется значение 2 (такой набор найдется, поскольку $f \in K$).

1.1.1. Пусть выход элемента E_2 не соединен со входом элемента E_3 и выход элемента E_3 не соединен со входом элемента E_2. Вычислим вероятность появления 2 на выходе схемы B по формуле полной вероятности и получим

$$(1-2\varepsilon)^3 + 2 \cdot 2\varepsilon(1-2\varepsilon)\varepsilon + (2\varepsilon)^2\varepsilon = 1 - 6\varepsilon + 16\varepsilon^2 - 12\varepsilon^3.$$

Тогда вероятность появления ошибки на выходе подсхемы B равна $p_2 = 6\varepsilon - 16\varepsilon^2 + 12\varepsilon^3$. По теореме 4 получаем неравенство

$$P(S) \geq 6\varepsilon - 16\varepsilon^2 + 12\varepsilon^3,$$

т.е. утверждение теоремы верно.

1.1.2. Пусть выход одного из элементов, например E_2, соединен со входом другого элемента E_3.

1.1.2.1. Пусть элементу E_3 приписана функция $J_2(x)$ или константа 2 (иначе значение 2 не появится на выходе схемы B) или же элементу E_3 приписана функция двух переменных ($\&$ или $\vee$) и оба входа элемента E_3 соединены с выходом элемента E_2. Вероятность появления значения 2 на выходе схемы B в этих случаях равна

$$(1-2\varepsilon)\left[(1-2\varepsilon)^2 + 2\varepsilon \cdot \varepsilon\right] + 2\varepsilon \cdot \varepsilon = 1 - 6\varepsilon + 16\varepsilon^2 - 12\varepsilon^3.$$

Тогда вероятность появления ошибки на выходе подсхемы B равна $p_2 = 6\varepsilon - 16\varepsilon^2 + 12\varepsilon^3$. По теореме 1 получаем неравенство

$$P(S) \geq 6\varepsilon - 16\varepsilon^2 + 12\varepsilon^3,$$

т.е. утверждение теоремы верно.

1.1.2.2. Пусть элементу E_3 приписана функция $\&$ или $\vee$, но только один из входов элемента E_3 соединен с выходом элемента E_2. Вероятность появления значения 2 на выходе схемы B в этих случаях равна

$$(1-2\varepsilon)\left[(1-2\varepsilon)^2 + 2\varepsilon \cdot \varepsilon\right] + 2\varepsilon \cdot \varepsilon = 1 - 6\varepsilon + 16\varepsilon^2 - 12\varepsilon^3.$$

Тогда вероятность появления ошибки на выходе подсхемы B равна $p_2 = 6\varepsilon - 16\varepsilon^2 + 12\varepsilon^3$. По теореме 4 получаем неравенство

$$P(S) \geq 6\varepsilon - 16\varepsilon^2 + 12\varepsilon^3,$$

т.е. утверждение теоремы верно.

1.2. Пусть элементы E_2 и E_3 совпадают, т.е. оба входа элемента E_1 соединены с выходом элемента E_2. Обозначим через B подсхему, состоящую из элемента E_1. Очевидно, что схема B реализует тождественную функцию, а вероятности появления ошибок на выходе схемы B равны: $w_0 = w_1 = w_2 = 2\varepsilon$. По теореме 5 справедливо неравенство $\frac{2\varepsilon}{8\varepsilon} \leq 6\varepsilon + 126\varepsilon^2$, что неверно, поскольку при $\varepsilon \leq 1/1000$

$$\frac{1}{4} > 6\varepsilon > 6\varepsilon + 126\varepsilon^2.$$

Полученное противоречие означает, что рассматриваемая схема не может быть подсхемой b-схемы S.

2. Пусть элементу E_1 приписана функция $\vee$. Поскольку $f \in K$, входы элемента E_1 соединены не с полюсами, а с выходами некоторых элементов E_2 и E_3.

2.1. Пусть элементы E_2 и E_3 различны. Обозначим через B подсхему, состоящую из элементов E_1, E_2 и E_3. Пусть входной набор схемы B таков, что при отсутствии неисправностей в схеме B на ее выходе появляется значение 0 (такой набор найдется, поскольку $f \in K$).

2.1.1. Пусть выход элемента E_2 не соединен со входом элемента E_3 и выход элемента E_3 не соединен со входом элемента E_2. Вычислим вероятность появления 0 на выходе схемы B по формуле полной вероятности и получим

$$(1-2\varepsilon)^3 + 2 \cdot 2\varepsilon(1-2\varepsilon)\varepsilon + (2\varepsilon)^2\varepsilon = 1 - 6\varepsilon + 16\varepsilon^2 - 12\varepsilon^3.$$

Тогда вероятность появления ошибки на выходе подсхемы B равна $p_0 = 6\varepsilon - 16\varepsilon^2 + 12\varepsilon^3$. По теореме 1 получаем неравенство

$$P(S) \geq 6\varepsilon - 16\varepsilon^2 + 12\varepsilon^3,$$

т.е. утверждение теоремы верно.

2.1.2. Пусть выход одного из элементов, например E_2, соединен со входом другого элемента E_3.

2.1.2.1. Пусть элементу E_3 приписана одна из функций $J_i(x)$, $i \in \{1, 2\}$, или константа 0 (иначе значение 0 не появится на выходе схемы B) или же элементу E_3 приписана функция двух переменных ($\&$ или $\vee$) и оба входа элемента E_3 соединены с выходом элемента E_2. Вероятность появления значения 0 на выходе схемы B в этих случаях равна

$$(1-2\varepsilon)\left[(1-2\varepsilon)^2+2\varepsilon\cdot\varepsilon\right]+2\varepsilon\cdot\varepsilon=1-6\varepsilon+16\varepsilon^2-12\varepsilon^3.$$

Тогда вероятность появления ошибки на выходе подсхемы B равна $p_0=6\varepsilon-16\varepsilon^2+12\varepsilon^3$. По теореме 4 получаем неравенство

$$P(S)\geq 6\varepsilon-16\varepsilon^2+12\varepsilon^3,$$

т.е. утверждение теоремы верно.

2.1.2.2. Пусть элементу E_3 приписана функция & или $\vee$, но только один из входов элемента E_3 соединен с выходом элемента E_2. Вероятность появления значения 0 на выходе схемы B в этих случаях равна

$$(1-2\varepsilon)\left[(1-2\varepsilon)^2+2\varepsilon\cdot\varepsilon\right]+2\varepsilon\cdot\varepsilon=1-6\varepsilon+16\varepsilon^2-12\varepsilon^3.$$

Тогда вероятность появления ошибки на выходе подсхемы B равна $p_0=6\varepsilon-16\varepsilon^2+12\varepsilon^3$. По теореме 4 получаем неравенство

$$P(S)\geq 6\varepsilon-16\varepsilon^2+12\varepsilon^3,$$

т.е. утверждение теоремы верно.

2.2. Пусть элементы E_2 и E_3 совпадают, т.е. оба входа элемента E_1 соединены с выходом элемента E_2. Обозначим через B подсхему, состоящую из элемента E_1. Очевидно, что схема B реализует тождественную функцию, а вероятности появления ошибок на выходе схемы B равны: $w_0=w_1=w_2=2\varepsilon$. По теореме 5 справедливо неравенство $\frac{2\varepsilon}{8\varepsilon}\leq 6\varepsilon+126\varepsilon^2$, что неверно, поскольку при $\varepsilon\leq 1/1000$

$$\frac{1}{4}>6\varepsilon>6\varepsilon+126\varepsilon^2.$$

Полученное противоречие означает, что рассматриваемая схема не может быть подсхемой b-схемы S.

3. Пусть элементу E_1 приписана любая из функций $J_i(x)$ или константа j $(i,j\in\{0,1,2\})$. Тогда схема S реализует либо функцию, принимающую только два значения 0 и 2, либо константу j, что противоречит условию $f\in K$. Теорема 6 доказана.

Из теоремы 4 следует, что при $\varepsilon\in(0,1/1000]$ любая схема, удовлетворяющая условиям теоремы 3 и реализующая функцию $f\in K$, является асимптотически оптимальной по надежности и функционирует с ненадежностью, асимптотически равной 6ε при $\varepsilon\to 0$.

Оценим количество функций $f\notin K(n)$. Для этого воспользуемся утверждением 1.

Утверждение 1. Любую функцию $f(x_1,...,x_{k-1},x_k,x_{k+1},...,x_n)$ можно разложить по переменной x_k $(k\in\{1,2,...,n\})$ следующим образом:

$$f(x_1,...,x_{k-1},x_k,x_{k+1},...,x_n)=J_0(x_k)\,\&\,f(x_1,...,x_{k-1},0,x_{k+1},...,x_n)\vee$$
$$\vee J_1(x_k)\,\&\,f(x_1,...,x_{k-1},1,x_{k+1},...,x_n)\vee$$
$$\vee J_2(x_k)\,\&\,f(x_1,...,x_{k-1},2,x_{k+1},...,x_n). \qquad (6)$$

Доказательство проводится непосредственной подстановкой различных значений переменной x_k в правую и левую части тождества (6).

Утверждение 2. $|K(n)|\geq 3^{3^n}-2n3^{2\cdot 3^{n-1}}-3\cdot 2^{3^n}$.

Доказательство. Используя формулу (6), разложим функцию $x_k\,\&\,g(\tilde{x})$ по переменной x_k:

$$x_k\&g(\tilde{x})=J_0(x_k)\&0\&g(x_1,...,x_{k-1},0,x_{k+1},...,x_n)\vee J_1(x_k)\&$$
$$\&1\,\&g(x_1,...,x_{k-1},1,x_{k+1},...,x_n)\vee J_2(x_k)\&2\&g(x_1,...,x_{k-1},2,x_{k+1},...,x_n)=$$
$$=J_1(x_k)\&1\&g(x_1,...,x_{k-1},1,x_{k+1},...,x_n)\vee J_2(x_k)\&g(x_1,...,x_{k-1},2,x_{k+1},...,x_n)\,.$$

Тогда число функций, представимых в виде $x_k\&g(\tilde{x})$, не больше $n3^{3^{n-1}}\cdot 3^{3^{n-1}}=n3^{2\cdot 3^{n-1}}$.

Теперь рассмотрим функции вида $x_k\vee g(\tilde{x})$. Используя формулу (5), разложим функцию $x_k\vee g(\tilde{x})$ по переменной x_k:

$$x_k\vee g(\tilde{x})=J_0(x_k)\&\left[0\vee g(x_1,...,x_{k-1},0,x_{k+1},...,x_n)\right]\vee$$
$$\vee J_1(x_k)\&\left[1\vee g(x_1,...,x_{k-1},1,x_{k+1},...,x_n)\right]\vee J_2(x_k)\,\&$$
$$\&\left[2\vee g(x_1,...,x_{k-1},2,x_{k+1},...,x_n)\right]=J_0(x_k)\,\&$$
$$\&g(x_1,...,x_{k-1},0,x_{k+1},...,x_n)\vee J_1(x_k)\,\&\left[1\vee g(x_1,...,x_{k-1},1,x_{k+1},...,x_n)\right]\vee J_2(x_k).$$

Тогда число функций, представимых в виде $x_k\vee g(\tilde{x})$, не больше

$$n3^{3^{n-1}}\cdot 3^{3^{n-1}}=n3^{2\cdot 3^{n-1}}\,.$$

Таким образом, число функций, представимых в виде $x_k\,\&\,g(\tilde{x})$ или $x_k\vee g(\tilde{x})$, не больше $2n3^{2\cdot 3^{n-1}}$.

Теперь рассмотрим функции, принимающие не больше двух значений из множества $\{0,1,2\}$. Очевидно, их число не больше $C_3^2\cdot 2^{3^n}=3\cdot 2^{3^n}$.

Следовательно, число функций $f\notin K(n)$ не больше $2n3^{2\cdot 3^{n-1}}+3\cdot 2^{3^n}$, а

$$|K(n)|\geq 3^{3^n}-2n3^{2\cdot 3^{n-1}}-3\cdot 2^{3^n}.$$

Утверждение 2 доказано.

Из утверждения 2 следует, что класс K содержит почти все функции из P_3, поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n3^{2\cdot 3^{n-1}}+3\cdot 2^{3^n}}{3^{3^n}}=0.$

Выводы

1. Из теоремы 3 следует, что любую функцию из P_3 можно реализовать схемой, функционирующей с ненадежностью, асимптотически (при $\varepsilon \to 0$) не больше 6ε.

2. Из теоремы 6 следует, что функции класса K (содержащего почти все функции из P_3) нельзя реализовать схемами с ненадежностью, асимптотически (при $\varepsilon \to 0$) меньше 6ε.

3. Таким образом, почти все функции из P_3 можно реализовать асимптотически оптимальными по надежности схемами, функционирующими с ненадежностью, асимптотически равной 6ε при $\varepsilon \to 0$.

Список литературы

1. **Васин, А. В.** О базисах, в которых асимптотически оптимальные схемы функционируют с ненадежностью 5ε / А. В. Васин // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2010. – № 1 (13). – С. 64–79.
2. **Грабовская, С. М.** О надежности неветвящихся программ с ненадежным оператором условной остановки в произвольном полном конечном базисе / С. М. Грабовская // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2011. – № 3 (19). – С. 52–60.
3. **Алехина, М. А.** О ненадежности схем, реализующих функции из P_3 / М. А. Алехина, О. Ю. Барсукова // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2012. – № 1 (21). – С. 57–65.
4. **Яблонский, С. В.** Введение в дискретную математику / С. В. Яблонский. – М. : Наука, 1986. – 384 с.
5. **Алехина, М. А.** О ненадежности схем из ненадежных функциональных элементов при однотипных константных неисправностях на выходах элементов / М. А. Алехина // Дискретная математика. – 1993. – Т. 5, № 2. – С. 59.
6. **Alekhina, M. A.** Synthesis and complexity of asymptotically optimal circuits with unreliable gates / M. A. Alekhina // Fundamenta Informaticae. – 2010. – № 104 (3). – P. 219–222.

References

1. Vasin A. V. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2010, no. 1 (13), pp. 64–79.
2. Grabovskaya S. M. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2011, no. 3 (19), pp. 52–60.
3. Alekhina M. A., Barsukova O. Yu. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2012, no. 1 (21), pp. 57–65.
4. Yablonskiy S. V. *Vvedenie v diskretnuyu matematiku* [Introduction into discrete mathematics]. Moscow: Nauka, 1986, 384 p.
5. Alekhina M. A. *Diskretnaya matematika* [Discrete mathematics]. 1993, vol. 5, no. 2, p. 59.
6. Alekhina M. A. *Fundamenta Informaticae*. 2010, no. 104 (3), pp. 219–222.

Алехина Марина Анатольевна
доктор физико-математических наук, профессор, заведующая кафедрой дискретной математики, Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: alehina@pnzgu.ru

Alekhina Marina Anatol'evna
Doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of sub-department of discrete mathematics, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Барсукова Оксана Юрьевна
старший преподаватель, кафедра дискретной математики, Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: kuzya_7@mail.ru

Barsukova Oksana Yur'evna
Senior lecturer, sub-department of discrete mathematics, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

УДК 519.718

Алехина, М. А.

Оценки ненадежности схем в базисе Россера – Туркетта / М. А. Алехина, О. Ю. Барсукова // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2014. – № 1 (29). – С. 5–19.